



Marco Falconi

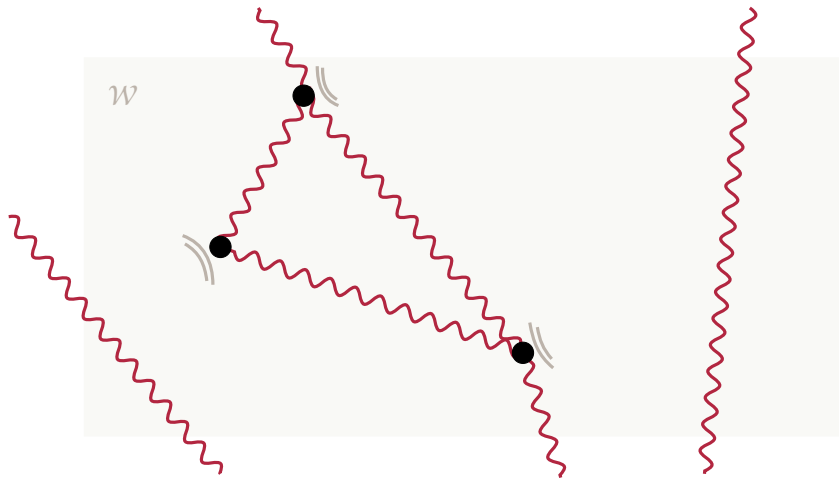
Eberhard Karls Universität Tübingen

Limiti Quasi-Classici in Meccanica Quantistica

(In collaborazione con R. Carlone, M. Correggi, M. Olivieri)

XXI Congresso U.M.I. – Pavia 2019

Sistemi di particelle in interazione con un campo di radiazione



La descrizione quasi-classica: campo macroscopico

- Nel regime quasi-classico, il numero di eccitazioni del campo di radiazione è molto grande, e ciò porta il campo ad essere su una scala energetica molto più alta rispetto a quella delle particelle quantistiche. Tale campo si comporta quindi *classicamente*.
- In termini matematici, conviene introdurre un parametro $\varepsilon \in (0, 1)$, che quantifichi il numero di eccitazioni del campo di radiazione:

$$\langle d\Gamma(1) \rangle = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

- Ovviamente lo stato della radiazione nell'aspettazione qui sopra dipende dal parametro ε . È quindi utile rendere anche le osservabili dipendenti da ε :

La descrizione quasi-classica: campo macroscopico

- Nel regime quasi-classico, il numero di eccitazioni del campo di radiazione é molto grande, e ciò porta il campo ad essere su una scala energetica molto più alta rispetto a quella delle particelle quantistiche. Tale campo si comporta quindi *classicamente*.
- In termini matematici, conviene introdurre un parametro $\varepsilon \in (0, 1)$, che quantifichi il numero di eccitazioni del campo di radiazione:

$$\langle d\Gamma_\varepsilon(1) \rangle = O(1) .$$

- Ovviamente lo stato della radiazione nell'aspettazione qui sopra dipende dal parametro ε . È quindi utile rendere anche le osservabili dipendenti da ε :

$$d\Gamma_\varepsilon(1) := \varepsilon d\Gamma(1) \longleftrightarrow a_\varepsilon^\# := \sqrt{\varepsilon} a^\# .$$

- L'introduzione del parametro ε nelle osservabili è particolarmente conveniente, in quanto induce una rappresentazione semiclassica delle relazioni di commutazione canoniche del campo (e del campo solamente!):

$$[a_\varepsilon(k), a_\varepsilon^*(k')] = \varepsilon \delta(k - k') .$$

- Definiamo come *Limite Quasi-Classico* il limite

$$\boxed{\varepsilon \rightarrow 0} .$$

È analogo ad un *limite adiabatico*, in cui il campo gioca il ruolo dei *gradi di libertà lenti*.

Struttura matematica dei sistemi quasi-classici

■ Particelle (Sistema Piccolo):

- Sistema quantistico non-relativistico.
- Le osservabili sono operatori lineari su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} .
- Gli stati sono operatori su \mathcal{H} di classe traccia (=1) e positivi.

■ Campo (Sistema Ambiente):

- Sistema classico con infiniti gradi di libertà.
- Le configurazioni del campo sono elementi di uno spazio vettoriale infinito dimensionale \mathfrak{h} , che nei casi considerati ha una struttura di Hilbert.
- Le osservabili sono funzioni (a valori reali) su \mathfrak{h} .
- Gli stati sono misure di probabilità nello spazio delle configurazioni \mathfrak{h} .

■ Azione dell'ambiente sul sistema piccolo:

- Le osservabili del sistema piccolo dipendono dalla configurazione del sistema ambiente:

$$\mathfrak{h} \ni z \longmapsto \mathcal{F}(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

- Gli stati del sistema piccolo, nonché la loro evoluzione, dipendono dalla configurazione del sistema ambiente:

$$\mathbb{R} \times \mathfrak{h} \ni (t, z) \longmapsto \mathcal{U}_t(z) \gamma(z) \mathcal{U}_t^*(z) \in \mathcal{L}_{+,1}^1(\mathcal{H})$$

■ Azione del sistema piccolo sull'ambiente:

- Nessuna.

■ Descrizione probabilistica mista, sia classica che noncommutativa:

- La distribuzione di probabilità (noncommutativa) $\gamma|_{t,E}$ per il sistema piccolo, condizionata al verificarsi di un evento (classico) E al tempo t nel sistema ambiente è data dalla seguente formula:

$$\gamma|_{t,E} = \int_{z \in E} u_t(z) \gamma(z) u_t^*(z) d\mu_t(z),$$

dove μ_t è la distribuzione di probabilità descrivente il sistema ambiente al tempo t .

- È possibile descrivere la distribuzione di probabilità del sistema totale (sistema piccolo + ambiente) usando cosiddette *misure a valori a stati*:

$$m \in \mathcal{M}(\mathfrak{h}, \text{Borel}(\mathfrak{h}); \mathcal{L}_+^1(\mathcal{H})).$$

Nei casi da noi considerati, ogni misura a valori a stati si può infatti decomporre in una misura scalare μ , stato del sistema ambiente, ed una funzione, definita μ -quasi-dappertutto, $z \mapsto \gamma(z)$, in cui $\gamma(z)$ è uno stato del sistema piccolo.

Dal sistema microscopico a quello quasi-classico: il limite quasi-classico

Obiettivo

Derivare la descrizione quasi-classica in maniera rigorosa – come approssimazione di un'interazione microscopica tra particelle e campo di radiazione – nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Per ottenere ciò sviluppiamo strumenti di *analisi quasi-classica*:

- Analisi semiclassica con un numero infinito di gradi di libertà
- Simboli a valori operatori
- Misure di Wigner a valori a stati
- Quantizzazione di Weyl e Anti-Wick solo per simboli cilindrici
- Quantizzazione di Wick per simboli polinomiali

Limite quasi-classico dinamico: Teorema di Egorov

Teorema (Correggi, F., Olivieri 2019)

Sia $\Gamma_\varepsilon \in \mathcal{S}_\varepsilon$ uno stato microscopico (sufficientemente regolare). Allora

$$\Gamma_{\varepsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{m} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \Gamma_{\varepsilon_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{m}_t .$$

Limite quasi-classico dinamico: Teorema di Egorov

Teorema (Correggi, F., Olivieri; 2019)

Sia $\Gamma_\varepsilon \in \mathbb{S}_\varepsilon$ uno stato microscopico (sufficientemente regolare). Allora

$$\Gamma_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{m} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \Gamma_{\varepsilon_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{m}_t .$$

- $\mathbf{m} \in \mathcal{M}(\mathfrak{h}; \mathcal{L}_+^1(\mathcal{H}))$;
- $\Gamma_\varepsilon(t) := \Phi_\varepsilon(t)\Gamma_\varepsilon = e^{-itH_\varepsilon} \Gamma_\varepsilon e^{itH_\varepsilon}$ è l'evoluzione microscopica dello stato;
- $\mathbf{m}_t := \Phi_0(t)\mathbf{m}$ è l'evoluzione quasi-classica di \mathbf{m} , data da

$$\Phi_0(t)(\mu, \gamma(z)) = (\varphi_t * \mu, \mathcal{U}_{t,0}(z)\gamma(z)\mathcal{U}_{t,0}^*(z)) ,$$

dove $\mathcal{U}_{t,s}(z)$ è l'evoluzione su \mathcal{H} generata dall'Hamiltoniana quasi-classica $\mathcal{H}_t(z)$.

Commenti

- Il teorema di Egorov può essere visualizzato tramite il seguente diagramma commutativo, valido per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{S}_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,1)} & \xrightarrow{\Phi_\varepsilon(t)} & (\mathcal{S}_\varepsilon)_{\varepsilon \in (0,1)} \\
 \downarrow \varepsilon \rightarrow 0 & & \downarrow \varepsilon \rightarrow 0 \\
 \mathcal{M}(\mathfrak{h}; \mathcal{L}_+^1(\mathcal{H})) & \xrightarrow{\Phi_0(t)} & \mathcal{M}(\mathfrak{h}; \mathcal{L}_+^1(\mathcal{H})).
 \end{array}$$

- $\mathcal{H}_t(z)$ dipende dal modello microscopico considerato. In particolare si possono ottenere i seguenti sistemi, di interesse fisico:
 - $\mathcal{H}_t(z) = -\Delta + \mathcal{V}_t(z)$;
 - $\mathcal{H}_t(z) = (-i\nabla + e\mathcal{A}_t(z))^2$;
 - $\mathcal{H}_t(z) = -\Delta + \beta(t)\delta(x)$.
 (Carlone, Correggi, F., Olivieri; 2019 - $d \leq 3$)

- La convergenza $\Gamma_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{m}$ va interpretata nel modo seguente:
 - Sia $\hat{\Gamma}_\varepsilon : \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ la *trasformata di Fourier noncommutativa* dello stato microscopico;
 - Sia $\hat{\mathbf{m}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ la *trasformata di Fourier (classica)* dello stato quasi-classico;
 - Allora $\Gamma_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{m}$ se e solo se $\hat{\Gamma}_{\varepsilon_n}(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{m}}(z)$ converge in topologia debole per ogni $z \in \mathfrak{h}$.

Punti salienti della dimostrazione

- 1 Dato $\Gamma_{\varepsilon_n} \rightarrow \mathbf{m}$, estrarre una sottosuccessione $\Gamma_{\varepsilon_{n_k}}$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\Gamma_{\varepsilon_{n_k}}(t) \rightarrow \mathbf{m}_t$.
- 2 Usando tecniche di analisi quasi-classica, studiare il limite $k \rightarrow \infty$ dell'equazione di evoluzione microscopica:

$$\Gamma_{\varepsilon_{n_k}}(t) = \Gamma_{\varepsilon_{n_k}} - i \int_0^t [H_{\varepsilon_{n_k}}, \Gamma_{\varepsilon_{n_k}}(\tau)] d\tau .$$

- 3 Studiare le proprietà dell'equazione di trasporto ottenuta per la misura quasi-classica \mathbf{m}_t :

$$d\mathbf{m}_t(z) = d\mathbf{m}(z) - i \int_0^t [\mathcal{H}_\tau(z), \gamma_\tau(z)] d\mu_\tau d\tau ,$$

in particolare l'unicità di soluzioni che soddisfino certe proprietà di regolarità (che sappiamo essere soddisfatte a priori per misure di Wigner).

Problemi variazionali quasi-classici

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon = ?$

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\Psi_\varepsilon^{(gs)}\rangle \langle \Psi_\varepsilon^{(gs)}| = ?$

Problemi variazionali quasi-classici

■ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon = ?$

■ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\Psi_\varepsilon^{(0)}\rangle \langle \Psi_\varepsilon^{(0)}| = ?$

$$\left(E_\varepsilon = \inf \sigma(H_\varepsilon) \quad , \quad H_\varepsilon \Psi_\varepsilon^{(0)} = E_\varepsilon \Psi_\varepsilon^{(0)} \right)$$

Teorema (Correggi, F., Olivieri; in corso di preparazione)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon = \inf_{z \in \mathfrak{h}, \|\psi\|_{\mathcal{H}}=1} \langle \psi, \mathcal{H}(z)\psi \rangle_{\mathcal{H}} + \mathcal{E}(z);$$
$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} |\Psi_{\varepsilon_n}^{(0)}\rangle \langle \Psi_{\varepsilon_n}^{(0)}| = \mathbf{m}^{(0)},$$

dove $\mathbf{m}^{(0)}$ è tale che $\mu^{(0)}$ è concentrata sugli $\mathbf{z} \in \mathfrak{h}$ tali che esista un $\psi \in \mathcal{H}$ per cui (\mathbf{z}, ψ) minimizza l'energia quasi-classica, inoltre il corrispondente $\gamma^{(0)}(\mathbf{z})$ proietta sul sottospazio generato da tali vettori ψ .

Teorema (Correggi, F., Olivieri; in corso di preparazione)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon = \inf_{z \in \mathfrak{h}, \|\psi\|_{\mathcal{H}}=1} \langle \psi, \mathcal{H}(z)\psi \rangle_{\mathcal{H}} + \mathcal{E}(z);$$
$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} |\Psi_{\varepsilon_n}^{(0)}\rangle \langle \Psi_{\varepsilon_n}^{(0)}| = \mathbf{m}^{(0)},$$

dove $\mathbf{m}^{(0)}$ è tale che $\mu^{(0)}$ è concentrata sugli $z \in \mathfrak{h}$ tali che esista un $\psi \in \mathcal{H}$ per cui (z, ψ) minimizza l'energia quasi-classica, inoltre il corrispondente $\gamma^{(0)}(z)$ proietta sul sottospazio generato da tali vettori ψ .

Commento

Non sono necessarie a priori né la limitatezza dal basso dell'energia quasi-classica, né l'esistenza di minimizzatori! Il primo fatto si ottiene automaticamente se E_ε è limitata dal basso uniformemente in ε , il secondo segue dall'esistenza dello stato fondamentale microscopico.

Vi ringrazio per l'attenzione.